MATURA 2012

Powtórka do matury z matematyki

Część II: Wyrażenia algebraiczne

Organizatorzy: MatmaNa6.pl i Dziennik.pl

Witaj,

Dzisiaj prezentujemy rozwiązania do zadań z działu wyrażenia algebraiczne. Jeżeli jakieś rzeczy nie są dla Ciebie jasne i chciałbyś dowiedzieć się więcej przed maturą to zapraszam na http://matmana6.pl/tablice_matematyczne.

W poniedziałek kolejna – trzecia część powtórki. Jak zwykle pod adresem http://dziennik.pl

Powodzenia,

Redaktorzy portalu MatmaNa6.pl

Dziennikarze Dziennik.pl

Wyrażenia algebraiczne

Zadanie 1:

$$\frac{3x-4}{6x+2}=\frac{1}{7}$$

Rozwiązaniem równania jest

$a)\ x=1$

$b)\ x=2$

$c)\ x=3$

$d)\ x=4$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

$$\frac{3x-4}{6x+2}=\frac{1}{7}$$

$$7(3x-4)=6x+2$$

$$21x-28=6x+2$$

$$15x=30$$

$$x=2$$

Zadanie 2:

Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{x^2+x-7}{x^3-2x^2-5x+6}$ jest

$a)$ $\mathbb{R}$

$b)$ $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$

$c)$ $\mathbb{R}\setminus\{1,4\}$

$d)$ $\mathbb{R}\setminus\{-2,1,3\}$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź to d).

Mianownik nie może być równy 0, dlatego sprawdzamy warunek

$$x^3-2x^2-5x+6\neq 0$$

$$x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6\neq 0$$

$$x^2(x-3)+x(x-3)-2(x-3)\neq 0$$

$$(x-3)(x^2+x-2)\neq 0$$

$$x-3\neq 0 \quad \text{i} \quad x^2+x-2\neq 0$$

$$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$$

$$x_1=\frac{-1+3}{2}=1$$

$$x_2=\frac{1+3}{2}=2$$

Stąd otrzymujemy $x\neq 3 \wedge x\neq -2 \wedge x\neq 1$. Zatem dziedziną wyrażenie jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{-2,1,3\}$.

Zadanie 3:

Wyrażenie $(1+\sqrt{2})^3$ jest równe

$a)\ 5\sqrt{2}+7$

$b)\ 5\sqrt{2}-4$

$c)\ 6\sqrt{2}$

$d)\ 8\sqrt{2}$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)

Korzystamy z wzoru $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3\mathrm{a}b^2+b^3$.

$$(1+\sqrt{2})^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot 1\cdot(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}$$

Zadanie 4:

Jeżeli reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x+1$ wynosi 5 , to wynika z tego, że:

$a)\ W(-1)=0$

$b)\ W(1)=5$

$c)\ W(-1)=5$

$d)\ W(1)=0$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: c)

Zadanie 5:

Dane są dwa wielomiany:

$$P(x)=x^4+3x^3+2x^2+8 \quad ,$$

$$Q(x)=x^4+(a-4)x^3+(6b+1)x^2-c \quad .$$

Jeżeli wielomiany te są równe, to:

$a)$ $a=3,\ b=-2$

$b)$ $a=-1,\ c=8$

$c)$ $a=7,\ c=-8$

$d)$ $b=6,\ c=8$

Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: c)

Dwa wielomiany są równe, jeżeli mają takie same współczynniki, przy odpowiednich potęgach zmiennej x wielomianu. Stąd otrzymujemy równania:

$$\begin{cases} a-4=3 \\ 6b+1=2 \\ 8=-c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=7 \\ b=\frac{1}{6} \\ c=-8 \end{cases}$$

Zadanie 6:

Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{x^2+7}{2x^3+5x^2-11x+4}$ dla $x=\dfrac{1}{3}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2+7}{2\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\left(\frac{1}{3}\right)^2-11\cdot\frac{1}{3}+4}=\frac{\frac{1}{9}+7}{2\cdot\frac{1}{27}+\frac{5}{9}-\frac{11}{3}+4}=$$

$$=\frac{\frac{1}{9}+\frac{63}{9}}{\frac{2}{27}+\frac{15}{27}-\frac{99}{27}+\frac{108}{27}}=\frac{\frac{64}{9}}{\frac{26}{27}}=\frac{64}{9}\cdot\frac{27}{26}=\frac{96}{13}$$

Zadanie 7:

Rozłóż wielomian $W(x)=x^4+6x^3+6x^2+6x+5$ na czynniki.

Rozwiązanie:

$$W(x)=x^4+6x^3+6x^2+6x+5=x^4+5x^3+x^3+5x^2+x^2+5x+x+5=$$

$$=x^3(x+5)+x^2(x+5)+x(x+5)+(x+5)=(x+5)(x^3+x^2+x+1)=$$

$$=(x+5)(x^2(x+1)+(x+1))=(x+5)(x+1)(x^2+1)$$

Zadanie 8:

Pierwiastkami wielomianu $Q(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+15$ są $x=3$ i $x=5$

Oblicz współczynniki a i b .

Rozwiązanie:

Skoro $x=3$ i $x=5$ są pierwiastkami wielomianu $Q(x)$, to oznacza, że spełnione są warunki $W(3)=0$ i $W(5)=0$.

$$\begin{cases} W(3)=3^4-a\cdot 3^3+b\cdot 3^2-a\cdot 3+15=0 \\ W(5)=5^4-a\cdot 5^3+b\cdot 5^2-a\cdot 5+15=0 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań z dwoma niewiadomymi a i b .

$$\begin{cases} 81-9a+9b-3a+15=0 \\ 625-125a+25b-5a+15=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -30a+9b=-96 \\ -130a+25b=-640 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\frac{1}{3}(-32+10a) \\ -26a+5b=-128 \end{cases}$$

$$-26a+5\cdot\left(\frac{1}{3}(-32+10a)\right)=-128 \quad /\cdot 3$$

$$-78a+5\cdot(-32+10a)=-384$$

$$-78a-160+50a=-384$$

$$-28a=-224$$

$$a=8$$

$$\begin{cases} a=8 \\ b=\frac{1}{3}(-32+80)=16 \end{cases}$$

Nieznane współczynniki wielomianu $Q(x)$ są równe $a=8$ i $b=16$.

Zadanie 9:

Wykaż, że $\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}\geq 0$, dla $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}=\frac{b^2}{a^2b^2}-\frac{2ab}{a^2b^2}+\frac{a^2}{a^2b^2}=\frac{b^2-2ab+a^2}{a^2b^2}=\frac{(b-a)^2}{(ab)^2}\geq 0$$

Zadanie 10:

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n , liczba 6^n+4 jest podzielna przez 5 .

Rozwiązanie:

Korzystamy z wzoru $a^n-1=(a-1)(1+a+...+a^{n-1})$. Ponieważ $6^n-1=(6-1)(1+6+...+6^{n-1})=5(1+6+...+6^{n-1})$, to

$$\begin{aligned} 6^n+4=6^n-1+5=5(1+6+...+6^{n-1})+5= \\ =5(1+6+...+6^{n-1}+1)=5(2+6...+6^{n-1}) \end{aligned}.$$

Zatem liczba 6^n+4 jest podzielna przez 5 .

dziennik.pl

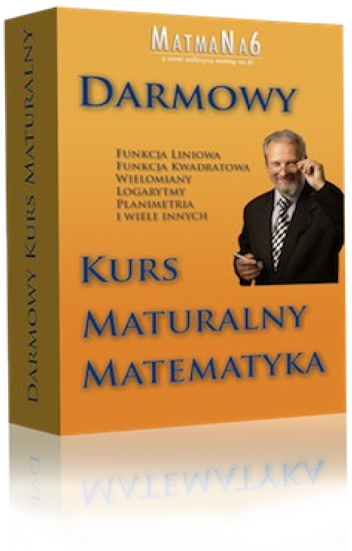
MatmaNa6
z nami zaliczysz matmę na 6!

Szczegółowe wyjaśnienia zagadnień z działu wyrażenia algebraiczne, które pomogą Ci w rozwiązaniu powyższych zadań znajdziesz na stronie :

http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum

Zapraszamy do przeczytania artykułu pt. *Co studiować, aby za 5 lat nie mieć problemu ze znalezieniem pracy?*

Wszelkie uwagi, komentarze na temat powtórki maturalnej można kierować na adres pytania@matmana6.pl.



Redaktorzy serwisu MatmaNa6.pl prowadzą **Darmowy Kurs Maturalny z matematyki** na poziomie podstawowym i rozszerzonym, który składa się z ponad 70 lekcji. Każda lekcja zawiera:

1. omówienie wybranego zagadnienia,
2. ćwiczenia interaktywne,
3. przykłady zadań,
4. zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania,
5. rozwiązania zadań z poprzedniej lekcji.

Kliknij, aby zapisać się na kurs.